

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 15 ottobre 1905.

Matematica. — *Sulla deformazione dei paraboloidi.* Nota del Socio L. BIANCHI.

1. Proseguendo i nuovi studi sulla deformazione delle quadriche, di cui un primo saggio, concernente le superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda, è comparso in questi medesimi Rendiconti (Seduta del 21 maggio 1905), ho potuto estendere questi risultati alle deformate dell'*ellissoide schiacciato* e ad altre tre classi, distinte dal punto di vista reale, di superficie reali applicabili sull'*ellissoide immaginario*. Ne è sorta per tal modo una teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde, perfettamente analoga a quella delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante, della quale tratto diffusamente in una Memoria ora in corso di stampa nel T. XIV delle Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

L'elemento essenziale geometrico per la nuova teoria è dato da una classe di congruenze rettilinee W ⁽¹⁾ le cui due falde focali sono applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima quadrica rotonda. Tali congruenze sono appunto una generalizzazione delle *congruenze pseudosferiche*, le cui due falde focali, avendo la medesima curvatura costante negativa, sono applicabili l'una sull'altra e sulla sfera immaginaria.

⁽¹⁾ Col nome di congruenze W si indicano quelle sulle cui falde focali le linee asintotiche si corrispondono.

D'altra parte vari risultati complementari, ottenuti nel corso di questi studi, mi avevano condotto a pensare che non solo per le quadriche rotonde ma ben anche per le quadriche *generalì* l'elemento geometrico delle indicate congruenze W dovesse conservare il suo significato fondamentale e la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche potesse così, semplificandosi, raggiungere il grado stesso di sviluppo conseguito dalla teoria delle superficie di curvatura costante.

Queste previsioni geometriche hanno intanto ricevuto una completa conferma per quanto riguarda le quadriche generali prive di centro o *paraboloidi*; e dei risultati ottenuti mi propongo appunto di dare notizia nella presente comunicazione. Le ricerche sulla deformazione dei paraboloidi già da me esposte nel T. IX, Serie 3^a degli Annali di Matematica (1903), opportunamente sviluppate ed interpretate nel nuovo senso geometrico, mi hanno dato qui il modo di raggiungere l'intento.

Quanto alle superficie applicabili sulle quadriche generali *a centro* è da pensarsi che si perverrà ad un perfezionamento corrispondente della teoria utilizzando il risultato fondamentale, stabilito dal Darboux nel 1899, che collega la deformazione delle quadriche alle superficie isoterme *speciali*, e gli studi ulteriori sulle trasformazioni di queste ultime superficie da me esposti l'anno scorso nel T. XI degli Annali (1).

2. Limitandoci per ora al caso dei paraboloidi, ecco l'enunciato della prima proposizione fondamentale per la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili su queste quadriche:

Teorema A). *Ogni superficie applicabile sul paraboloide generale, ellittico od iperbolico, appartiene come prima falda focale ad una doppia infinità di congruenze W , la cui seconda falda è applicabile sul paraboloide stesso.*

Il passaggio da una deformata S del paraboloide ad un'altra deformata S_1 , che formi insieme con S le due falde focali di una delle ∞^2 congruenze W considerate nel teorema, costituisce una delle ∞^2 trasformazioni della superficie S .

Data la superficie S , le operazioni analitiche necessarie per costruire le trasformate S_1 consistono nell'integrazione di un'equazione differenziale del tipo di Riccati, precisamente come per costruire le trasformate di Bäcklund di una data superficie pseudosferica. Ed anche qui delle due costanti arbitrarie, che figurano nella trasformazione generale della data superficie S , una entra già nei coefficienti della indicata equazione di Riccati. Denoteremo tale costante con σ e una qualunque delle trasformazioni corrispondenti sarà indicata col simbolo B_σ .

(1) *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche.*

Dalle proprietà delle equazioni di Riccati segue che, nota una delle trasformate S_1 della superficie iniziale S per mezzo di una B_σ , le altre ∞^1 superficie trasformate, corrispondenti al medesimo valore della costante σ si ottengono eseguendo semplicemente *quadrature*. E poichè della S_1 conosciamo già una trasformata, la S , basteranno quadrature per costruire le ∞^1 trasformate della nuova S_1 per la medesima B_σ , e così via di seguito.

Ma un nuovo ed importante passo nella teoria si può compiere servendosi della seconda proposizione fondamentale, che diciamo il *teorema di permutabilità*:

Teorema B). *Se da una superficie S applicabile sul paraboloide generale (ellittico od iperbolico) si ottengono due nuove deformate S_1, S_2 del paraboloide stesso mediante due delle nostre trasformazioni $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$, a costanti σ_1, σ_2 differenti, esiste una quarta superficie S' della medesima specie, pienamente determinata e costruibile in termini finiti da S, S_1, S_2 , che è legata, come la S , alle due medesime S_1, S_2 da due trasformazioni $B'_{\sigma_2}, B'_{\sigma_1}$ colle stesse costanti σ_2, σ_1 invertite.*

È questo, come si vede, l'analogo del teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie pseudosferiche; da esso segue ancor qui, come principale corollario, la proposizione seguente:

Quando di una deformata S del paraboloide si conoscono tutte le ∞^2 superficie trasformate, l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione non richiede più alcun calcolo d'integrazione.

In questo caso si trovano per esempio le superficie di *traslazione*, con curve generatrici in piani perpendicolari applicabili sui paraboloidi; abbiamo così un effettivo gruppo di deformate dei paraboloidi, contenente un numero grande ad arbitrio di costanti, che si ottengono tutte in termini finiti con soli calcoli di derivazione.

3. Coi teoremi precedenti la teoria delle superficie applicabili sui paraboloidi generali raggiunge evidentemente lo stesso grado di sviluppo della teoria delle superficie pseudosferiche.

All'enunciato delle nostre proposizioni generali, in particolare del teorema fondamentale A), è necessario aggiungere alcune osservazioni complementari che ne precisano l'estensione. Nel teorema A) l'applicabilità delle superficie di cui si tratta è intesa nel senso generale analitico: come equivalenza dei loro ds^2 , per formole di corrispondenza *reali od immaginarie*.

Dal punto di vista reale, e limitatamente al caso attuale dei paraboloidi, dobbiamo aggiungere quanto segue:

Scrivendo l'equazione del paraboloide ellittico od iperbolico sotto la forma normale

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z,$$

esprimiamone il quadrato ds^2 dell'elemento lineare per i parametri α, β dati da

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{p}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{q}};$$

avremo

$$(1) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 \pm 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 + q) d\beta^2.$$

Una superficie reale S , data dalle formole

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta),$$

che in un campo reale di variabilità per α, β abbia l'elemento lineare (1), è da dirsi applicabile sul paraboloide in senso ristretto, cioè la regione reale di S è applicabile sulla regione reale del paraboloide.

Ora se nella (1) cangiamo ad esempio β in $\beta\sqrt{-1}$, abbiamo il nuovo

$$(2) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 \mp 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 - q) d\beta^2$$

equivalente, nel senso generale analitico, al ds^2 dato dalla (1). Se consideriamo una superficie *reale* S che per valori reali di α, β abbia l'elemento lineare (2), noi la diciamo ancora (nel senso generale) applicabile sul paraboloide; però questa volta l'indicata regione reale di S non è applicabile sulla regione reale del paraboloide, bensì sopra una regione immaginaria o ideale della quadrica. Diremo per ciò, usando un'opportuna denominazione del geometra russo Peterson, che in questo caso la S è applicabile sul paraboloide *fuori dei limiti*, mentre nel primo caso l'applicabilità si dirà propria o dentro ai limiti.

Ora il nostro teorema A) si applica indistintamente alle quattro corrispondenti forme di ds^2 :

$$a) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 - 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 + q) d\beta^2$$

$$b) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 + 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 - q) d\beta^2$$

$$c) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 + 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 + q) d\beta^2$$

$$d) \quad ds^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 - 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 - q) d\beta^2,$$

delle quali la prima e la terza appartengono all'effettiva regione reale del paraboloide iperbolico od ellittico rispettivamente, la seconda e la quarta alle loro regioni ideali. Ma se si tratta delle prime due forme (paraboloide iperbolico) le due falde focali S, S_1 delle congruenze W del teorema A) appartengono insieme o alla specie *a*) o alla specie *b*), cioè S, S_1 sono applicabili propriamente (in senso ristretto) l'una sull'altra. Per le due seconde forme *c*) *d*) invece (paraboloide ellittico) le due falde focali S, S_1 appartengono l'una alla specie *c*), l'altra alla *d*), cioè una di esse è applicabile

sul paraboloide propriamente o dentro ai limiti, l'altra impropriamente o fuori dei limiti. Nel caso adunque di una superficie S applicabile propriamente sul paraboloide ellittico è necessario applicare un numero *pari* di volte le nostre trasformazioni per ottenere una nuova superficie applicabile ancora propriamente sul paraboloide; con un numero dispari di tali trasformazioni si ottiene al contrario una deformata impropria o fuori dei limiti.

Dobbiamo da ultimo avvertire che il teorema A) non è applicabile al caso particolare del paraboloide rotondo, o meglio le ∞^2 congruenze di cui si parla si riducono in questo caso all'unica congruenza formata dalle tangenti alle deformate delle parabole meridiane e la seconda falda focale diventa la superficie complementare del paraboloide, che è applicabile, fuori dei limiti, sul paraboloide stesso.

Insomma, dal nostro punto attuale di vista, si comporta più semplicemente il paraboloide ellittico generale che non il paraboloide rotondo. Per altro di questa speciale superficie conosciamo già in termini finiti tutte le deformate (Darboux) e la teoria delle loro trasformazioni, quale consegue dai teoremi di Guichard e dalla teoria delle superficie d'area minima ⁽¹⁾, è ben lungi dal presentare l'interesse inerente agli altri casi, ove i metodi stessi costituiscono un vero e proprio processo d'integrazione.

4. Non è mia intenzione dare qui tutte le formole relative alle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi; il lettore potrà vederne ampiamente svolta la teoria in una Memoria che si pubblicherà fra breve negli Annali di Matematica. Soltanto, per far conoscere il metodo di trasformazione, darò qui le formole relative ad uno dei casi.

Considero una superficie S applicabile propriamente (dentro ai limiti) sul paraboloide iperbolico, e tale di più che il doppio sistema coniugato (u, v) che si conserva coniugato nel passaggio dalla configurazione S a quella paraboloidica sia formato di due sistemi di linee reali e distinte. Una tale deformata S (di prima specie) del paraboloide è definita *intrinsecamente* come segue ⁽²⁾. Scelte le dimensioni del paraboloide in guisa che sia

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

indichiamo con θ una funzione di u, v che soddisfi l'equazione a derivate parziali del secondo ordine:

$$(A) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sinh \theta \cosh \theta.$$

(1) Cfr. le mie *Lezioni*, vol. II, pp. 332 segg.

(2) Cfr. la citata Memoria del T. IX degli Annali, § 7 b).

Siano poi $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ quattro funzioni di u, v che soddisfino al sistema lineare:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \sinh \theta, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu - \frac{\cosh \theta}{p} \alpha - \frac{\sinh \theta}{q} \beta, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \sinh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh \theta, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda + \frac{\sinh \theta}{p} \alpha + \frac{\cosh \theta}{q} \beta; \end{array} \right.$$

Questo è un sistema lineare illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{p} - \frac{\beta^2}{q} = \text{cost.}$$

Scegliendo i valori *iniziali* di $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ per modo che la costante del 2° membro risulti $= 1$, che sia cioè

$$(B^*) \quad \mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1,$$

ne risulta definita intrinsecamente la nostra deformata S mediante le sue due forme quadratiche fondamentali ⁽¹⁾:

$$(3) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 - 2\alpha\beta d\alpha d\beta + (\beta^2 + q) d\beta^2$$

$$(4) \quad dx dX + dy dY + dz dZ = \frac{\sqrt{pq} \lambda \mu}{\sqrt{q\alpha^2 + p\beta^2 + pq}} (du^2 - dv^2)$$

dove nella prima i differenziali $d\alpha, d\beta$ si intendono espressi per du, dv mediante le (B):

$$\begin{cases} d\alpha = \lambda \cosh \theta du + \mu \sinh \theta dv \\ d\beta = \lambda \sinh \theta du + \mu \cosh \theta dv. \end{cases}$$

Ciò premesso, ecco come otteniamo le trasformazioni delle nostre superficie. Essendo θ una soluzione della (A), le equazioni simultanee per θ_1

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = -(\cosh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1 + \sinh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = (\cosh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1 + \sinh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1), \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Qui, al solito, x, y, z denotano le coordinate di un punto mobile sopra S ; X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

dove σ indica una costante arbitraria, formano un sistema illimitatamente integrabile e la sua soluzione generale, che contiene una nuova costante arbitraria oltre σ , soddisfa ancora alla (A). Ora da una quaderna $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ di funzioni che soddisfano al sistema lineare (B) ed alla equazione quadratica (B*), noi passiamo ad una nuova quaderna

$$\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$$

che soddisfa le equazioni analoghe (B₁), (B₁*), cangiato θ in θ_1 , mediante le formole di sostituzione lineare:

$$(D) \quad \begin{cases} k\alpha_1 = \cosh \theta_1 \cdot \lambda + \sinh \theta_1 \cdot \mu - \sinh \sigma \cdot \alpha \\ k\beta_1 = \sinh \theta_1 \cdot \lambda + \cosh \theta_1 \cdot \mu + \cosh \sigma \cdot \beta \\ k\lambda_1 = -A\lambda - B\mu - \frac{\cosh \theta}{p} \cdot \alpha - \frac{\sinh \theta}{q} \cdot \beta \\ k\mu_1 = C\lambda + D\mu + \frac{\sinh \theta}{p} \cdot \alpha + \frac{\cosh \theta}{q} \cdot \beta \end{cases}$$

Qui k indica una costante data dalla formola

$$k = \sqrt{\sinh^2 \sigma + \frac{1}{p}} = \sqrt{\cosh^2 \sigma - \frac{1}{q}}$$

e i coefficienti A, B, C, D si esprimono nel modo seguente per θ, θ_1 :

$$\begin{cases} A = \cosh \sigma \sinh \theta \sinh \theta_1 + \sinh \sigma \cosh \theta \cosh \theta_1 \\ B = \cosh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1 + \sinh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1 \\ C = \cosh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1 + \sinh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1 \\ D = \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \theta_1 + \sinh \sigma \sinh \theta \sinh \theta_1 \end{cases}$$

Dalle funzioni $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ resta così individuata intrinsecamente una nuova deformata S₁ del paraboloide, mediante le formole corrispondenti alle (3), (4)

$$\begin{cases} dsx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = (\alpha_1^2 + p) d\alpha_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 d\alpha_1 d\beta_1 + (\beta_1^2 + q) d\beta_1^2 \\ dx_1 dX_1 + dy_1 dY_1 + dz_1 dZ_1 = \frac{\sqrt{pq} \lambda_1 \mu_1}{\sqrt{q\alpha_1^2 + p\beta_1^2 + pq}} (du^2 - dv^2) \end{cases}$$

Fra i punti delle due deformate S, S₁ del paraboloide risulta una corrispondenza ove si riguardi come corrispondente ad un punto P $\equiv (u, v)$ dell'una, il punto P₁ $\equiv (u, v)$ dell'altra nel quale i parametri u, v hanno i medesimi valori; tale corrispondenza conserva, come è chiaro, i sistemi coniugati.

Tutto ciò concerne ancora soltanto le equazioni *intrinseche* delle due superficie, senza riguardo alla loro posizione relativa nello spazio. Ora è appunto essenziale pel nostro scopo il verificarsi della seguente proprietà: *le due deformate* S, S_1 *del paraboloido possono collocarsi in tale posizione nello spazio che le rette* PP_1 *congiungenti le coppie di punti corrispondenti di* S, S_1 *tocchino nel punto* P *la superficie* S , *nel punto* P_1 *la* S_1 ; *così le* S, S_1 *risultano le due falde focali di una congruenza* W .

A noi qui basterà dare le formole effettive che, supposta nota la superficie S , fanno conoscere in termini finiti la superficie S_1 ; esse si scrivono semplicemente nel modo seguente:

$$(E) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ y_1 = y + \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ z_1 = z + \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{cases}$$

Si osservi che, appena nota la superficie S e la soluzione θ_1 delle equazioni (C) che si considera, queste formole (E) danno in termini finiti la superficie S_1 , le funzioni λ_1, μ_1 che vi figurano essendo determinate dalle (D). Come si vede, nelle nostre trasformazioni entrano due costanti arbitrarie e cioè la σ ed il valore *iniziale* della θ_1 .

Formole perfettamente analoghe alle superiori valgono per tutti gli altri casi delle deformazioni dei paraboloidi.

Matematica. — *Sulle equazioni funzionali lineari.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

È noto come recentemente il Fredholm (1) abbia dato una soluzione generale dell'equazione funzionale

$$(1) \quad \varphi(x) - k \int_a^b \varphi(t) \alpha(x, t) dt = f(x)$$

dove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, e come l'Hilbert (2), che ha dato a co-desta equazione il nome di equazione integrale lineare di seconda specie, ne abbia dedotto conseguenze ed applicazioni importantissime, soprattutto nel caso in cui $\alpha(x, t)$ è simmetrica in x, t . L'importanza che viene così ad acquistare l'equazione (1), giustifica la ricerca del posto

(1) Acta Math., T. 27, pag. 365 (1903).

(2) Göttingen Nachrichten, 1904, pag. 49 e seg.

che le compete nella teoria generale delle operazioni; ora, si vede subito come la sua risoluzione sia contenuta come caso particolare — a dir vero, singolarmente interessante — nel problema dell'inversione di un fascio di operazioni distributive. Essendo A e B due tali operazioni, esse danno luogo al fascio

$$B - kA,$$

generalizzazione del fascio di omografie, al quale esso si riduce se le operazioni A e B agiscono su di uno spazio lineare ad un numero finito di dimensioni. Una delle operazioni, B per esempio, si può ridurre all'operazione unità; l'inversa del fascio è allora

$$(2) \quad (1 - kA)^{-1},$$

e questa inversa dà la risoluzione dell'equazione (1) quando sia

$$A(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) \alpha(x, t) dt.$$

In questa Nota, mi propongo di indicare sommariamente espressioni analitiche atte a rappresentare l'operazione (2), ed a mostrare il legame di queste espressioni colla risoluzione della equazione (1) data dal Fredholm, o con quella di un'equazione alquanto più speciale ma pure notevole, profondamente studiata dal Volterra ⁽¹⁾ ed incidentalmente dal Le Roux ⁽²⁾. I risultati accennati senza le dimostrazioni, nella presente Nota, verranno sviluppati in una Memoria più estesa, di prossima pubblicazione.

1. Sia C un insieme di funzioni f di una o più variabili, finite, e tali che la somma di un numero qualsiasi di esse in numero finito, ed anche in numero infinito sotto l'ipotesi della convergenza uniforme, appartenga all'insieme C medesimo.

Sia A un'operazione distributiva univoca, applicabile ad ogni elemento f di C , ed il cui risultato, che si indicherà con $A(f)$, appartenga allo stesso insieme C . L'operazione A sia inoltre continua. S'intende con ciò che ad ogni numero positivo ε corrisponde un numero positivo δ tale che, se è $|f| < \delta$, sia corrispondentemente

$$|A(f)| < \varepsilon.$$

La somma di un numero finito d'operazioni continue è pure un'operazione continua; lo stesso è del prodotto.

2. Supponiamo che per l'operazione A esista un numero positivo r tale che per qualsiasi elemento f di C , e per ogni numero h inferiore ad r in

⁽¹⁾ Atti della R. Accad. di Torino, 1896; e Annali di Matematica, 1897.

⁽²⁾ Annales de l'École Normale, S. II, T. XII, 1895.

valore assoluto, sia

$$(3) \quad |A^n(f)| < \frac{1}{|h^n|};$$

mentre per $|h| > r$ ed almeno per qualche elemento di C , la disuguaglianza (3) non abbia luogo. Diremo allora « che A ammette il raggio r nell'insieme C ».

Sotto questa ipotesi, si prenda una successione arbitraria di numeri

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

soggetti solo alla condizione

$$|a_n| < \eta^n r^n$$

con $\eta < 1$, e si consideri la serie:

$$(4) \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Questa serie è assolutamente convergente in tutto C ; essa è uniformemente convergente rispetto agli elementi di C e rispetto alle variabili da cui questi elementi dipendono; infine le è applicabile l'operazione A termine a termine. Essa rappresenta quindi un'operazione distributiva univoca in C , commutabile con A . Essa è inoltre continua. Infine $S(f)$ appartiene a C .

3. Facciamo in particolare

$$a_n = k^n, \quad |k| < \eta r, \quad \eta < 1.$$

L'operazione

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n$$

ammetterà le proprietà enumerate nel numero precedente. Se ora indichiamo con φ la somma della serie (5) ed applichiamo l'operazione A termine a termine alla serie stessa, verrà

$$A(\varphi) = \frac{1}{k} (\varphi - f)$$

o, in altri termini

$$(6) \quad (I - kA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n$$

per $|k| < r$.

4. Accanto all'equazione

$$(a) \quad \varphi - kA(\varphi) = f,$$

la cui soluzione è data, per $|k| < r$, dalla serie (5), vi è da considerare l'equazione, che si può dire omogenea

$$(b) \quad \omega - kA(\omega) = 0.$$

Questa equazione non ammette soluzione per ogni valore di k . Così, sotto l'ipotesi del n. 2, l'equazione non ha, nell'insieme C , soluzione per $|k| < r$, poichè da (b) si deduce

$$A^n(\omega) = \frac{\omega}{k^n},$$

la quale contraddice all'ipotesi (3).

Risulta da ciò che per $|k| < r$, l'equazione (a) ammette in C un'unica soluzione, quella rappresentata dalla serie (5).

Se per $k = \bar{k}$ la (b) ammette soluzione, si dirà che ω è un *invariante* di A relativo al numero \bar{k} .

5. Tornando all'ipotesi del n. 2, si possono distinguere tre casi: che sia $r = \infty$, $r = 0$, o che r abbia un valore finito. Nel primo caso la serie (5) è una funzione intera di k ; essa risolve per ogni k l'equazione (a), che ammette in C l'unica soluzione espressa da quella serie: l'equazione (b) non ha soluzione per alcun valore di k . In questa ipotesi, si vede pure che ha una, ed una sola soluzione in C ogni equazione della forma

$$(c) \quad a_0 \varphi + a_1 A(\varphi) + \dots + a_m A^m(\varphi) = f.$$

6. Consideriamo ora il caso in cui A ammetta in C un raggio r finito, tralasciando per il momento il caso di $r = 0$. Indichiamo con B un'operazione $1 - k_1 A$; essa, applicata a C , darà un insieme lineare C_1 che coincide con C se è $|k_1| < r$. Nel caso $|k_1| \geq r$, C_1 è contenuto in C , ma può non coincidere con C . Ammettiamo che il raggio di A in C_1 sia $r_1 > |k_1| \geq r$. Sotto questa ipotesi, si trova:

a) che esistono in C uno o più invarianti di A relativi a k_1 , i quali formano un insieme lineare Ω_1 ;

b) che esiste un'operazione T , rappresentata da una serie

$$T = \sum c_n A^n B,$$

assolutamente ed uniformemente ⁽¹⁾ convergente per $|k| < r_1$, la quale trasforma C in C_1 , ed un'altra operazione L della medesima forma, che trasforma C in Ω_1 .

c) che l'operazione $(1 - kA)^{-1}$, per $|k| < r_1$, si può esprimere mediante

$$(1 - kA)^{-1} = T + \frac{1}{k - k_1} L;$$

(1) La convergenza uniforme s'intende, come al n. 3, tanto rispetto agli elementi di C quanto alle variabili da cui dipendono questi elementi.

d) che l'insieme C si può scomporre in

$$C = C_1 + \Omega_1,$$

C_1 ed Ω_1 essendo senza elementi comuni;

e) che, eccettuato il valore $k = k_1$, l'operazione A non ammette invarianti relativi a numeri k inferiori in modulo ad r_1 .

7. Può avvenire che non B, ma B^2 trasformi C in un insieme C_1 in cui il raggio r_1 di A sia superiore ad r . Si trova allora:

a) che esistono in C invarianti di A relativi a k_1 , o radici di

$$\omega = k_1 A(\omega),$$

i quali costituiscono un insieme lineare Ω_1 ; ed invarianti di secondo ordine, o radici di

$$\omega - 2k_1 A(\omega) + k_1^2 A^2(\omega) = 0,$$

costituenti unitamente ai precedenti un insieme lineare Ω'_1 ;

b) che esistono operazioni T, L, L' della forma

$$\Sigma c_n A^n B^2$$

convergenti assolutamente ed uniformemente per $|k| < r_1$, e che mutano, la prima, l'insieme C in C_1 , la seconda C in Ω_1 , la terza C in Ω'_1 ;

c) che per $|k| < r_1$, si ha

$$(1 - kA)^{-1} = T + \frac{1}{k - k_1} L' + \frac{1}{(k - k_1)^2} L;$$

d) che l'insieme C si può scomporre in

$$C = C_1 + \Omega'_1;$$

e) che infine non esistono invarianti di A relativi a numeri k minori di r_1 in valore assoluto, ad eccezione di $k = k_1$.

8. I casi precedenti si generalizzano facilmente; il risultato al quale si giunge è il seguente:

Esista un'operazione

$$P = (1 - k_1 A)(1 - k_2 A) \dots (1 - k_s A)$$

dove k_1, k_2, \dots, k_s sono numeri fra loro distinti e maggiori di r in valore assoluto, tale che essendo C_1 l'insieme (necessariamente contenuto in C) che essa genera quando si applichi a C, il raggio di A in C_1 sia un numero positivo r_1 maggiore dei valori assoluti di k_1, k_2, \dots, k_s . Sotto questa ipotesi:

a) Esisteranno in C invarianti di A relativi a k_i ($i = 1, 2, \dots, s$); sia Ω_i lo spazio lineare di questi invarianti.

b) Esiste un'operazione T rappresentata da una serie

$$T = \Sigma c_n A^n P$$

a coefficienti razionali interi in k , assolutamente ed uniformemente convergente per $|k| < r$, che trasforma C in C_1 , ed operazioni L_i che applicate a C_1 danno gli elementi di Ω_i .

c) L'operazione inversa del fascio (2) si esprime mediante la formula

$$(7) \quad (1 - kA)^{-1} = T + \sum_{i=0}^s \frac{1}{k - k_i} L_i,$$

valida per tutti i valori di $|k| < r_1$, eccettuato $k = k_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

d) L'insieme C si scompone nella somma di spazi senza elementi comuni

$$C = C_1 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_s.$$

e) L'operazione A non ammette in C alcun invariante relativo a k per $|k| < r_1$, eccettuati i valori k_1, k_2, \dots, k_s di k .

f) L'operazione $(1 - k_i A)^{-1} f$ è possibile se e soltanto se f appartiene allo spazio

$$C - \Omega_i$$

ed ammette infinite soluzioni, deducibili tutte da una di esse mediante l'aggiunta di un elemento di Ω_i .

9. I risultati precedenti si estendono senza difficoltà al caso che l'operazione, mediante la quale si ottiene l'insieme C_1 in cui è aumentato il raggio di A , sia della forma

$$P = (1 - k_1 A)^{q_1} (1 - k_2 A)^{q_2} \dots (1 - k_s A)^{q_s};$$

essendo q_1, q_2, \dots, q_s numeri interi. Solo che, in questo caso, il termine sotto il segno Σ della (7) è sostituito da un'espressione della forma

$$\frac{1}{(k - k_i)^{q_i}} L_i + \frac{1}{(k - k_i)^{q_i-1}} L'_i + \dots + \frac{1}{k - k_i} L_i^{(q_i-1)};$$

esistono per A invarianti degli ordini $h = 1, 2, \dots, q_i$ rispetto a k_i , cioè soluzioni delle equazioni

$$(1 - k_i A)^h = 0,$$

e $L_i^{(h-1)}$, applicata a C , dà questi invarianti.

10. Passiamo ad indicare alcune applicazioni di ciò che precede, tralasciando per brevità la più semplice, quella che si riferisce al caso di uno spazio ad un numero finito di dimensioni, nel qual caso la (7) risolve il problema dell'inversione di un fascio di omografie.

Per primo esempio, facciamo

$$(8) \quad A(f) = \int_0^\infty \alpha(x, t) f(t) dt,$$

dove $\alpha(x, t)$ è una funzione di una variabile reale, finita e continua nell'intervallo $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$

Sia C l'insieme delle funzioni di una variabile, finite e continue nell'intervalli fra 0 ed 1, estremi inclusi. Il risultato dell'operazione (8) sarà, per ogni elemento $f(t)$ di C , pure un elemento di C , e tali sono pure i risultati di A^2, A^3, \dots

Sia μ il massimo valore assoluto di $f(t)$, m il massimo valore assoluto di $\alpha(x, t)$ negli intervalli indicati; sarà

$$|A^n(f)| < \frac{\mu m^n x^n}{n!},$$

onde segue che il raggio di A nell'insieme C è infinito. Si è così nel caso considerato al n. 5; l'operazione A non ha invarianti in C , e per ogni k la soluzione dell'equazione (a) è data da

$$(9) \quad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f).$$

Questa serie si può modificare in modo notevole, mediante un procedimento dovuto al Volterra (1). Posto

$$\alpha_1(x, t) = \alpha(x, t) \quad , \quad \alpha_{n+1}(x, t) = \int_t^x \alpha_1(x, u) \alpha_n(u, t) du,$$

viene

$$A^n(f) = \int_0^x f(t) \alpha_n(x, t) dt,$$

talchè la (9) si può scrivere

$$(10) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) \sum_{n=1}^{\infty} k^n \alpha_n(x, t) dt.$$

La nota legge degli indici

$$A^{m+n} = A^m A^n$$

si traduce qui nella relazione

$$\int_0^x f(t) \alpha_{m+n}(x, t) dt = \int_0^x \alpha_m(x, t) \int_0^t f(u) \alpha_n(u, t) du dt,$$

di cui il Volterra (2) dà la dimostrazione per via ricorrente.

(1) Atti della R. Accad. di Torino, 12 gennaio 1896.

(2) Lavoro citato, formula (7).

Questi sviluppi permettono di risolvere immediatamente il problema dell'inversione dell'integrale definito

$$\int_0^x \varphi(t) \alpha(x, t) dt = f(x) \quad (1),$$

basta la derivazione rispetto ad x per ricondurre questo problema alla risoluzione di un'equazione (a).

11. Come secondo esempio, l'insieme C essendo il medesimo che al numero precedente e così la funzione $\alpha(x, t)$, si ponga

$$A(f) = \int_0^1 f(t) \alpha(x, t) dt.$$

Qui viene

$$|A^n(f)| < \mu m^n;$$

A ha dunque in C un raggio non inferiore ad $\frac{1}{m}$. Per $|k| < \frac{1}{m}$, l'equazione (a) è dunque risolta da

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f)$$

ed in corrispondenza non esistono invarianti di A .

Ora dal lavoro di Fredholm (2) segue in sostanza che esistono numeri

$$g_n = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} \alpha(t_1, t_1) & \alpha(t_1, t_2) & \dots & \alpha(t_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(t_n, t_1) & \alpha(t_n, t_2) & \dots & \alpha(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n,$$

ed operazioni funzionali

$$G_n(f) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} f(x) & f(t_1) & \dots & f(t_n) \\ \alpha(x, t_1) & \alpha(t_1, t_1) & \dots & \alpha(t_n, t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(x, t_n) & \alpha(t_1, t_n) & \dots & \alpha(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

tali che si abbia

$$(11) \quad nAG_{n-1} = G_n - g_n f$$

e che le serie

$$\sum \frac{k^n G_n}{n!} \quad \text{e} \quad \delta(k) = \sum \frac{g_n k^n}{n!}$$

(1) Lavoro citato e Ann. di Matem., 1897; cfr. Le Roux, Ann. de l'Éc. Norm., 1895; Picard, Comptes Rendus, 25 juillet 1904.

(2) Acta, T. 27.

siano funzioni intere di k . Ne viene, per la (11):

$$\delta(k) \sum k^n A^n(f) = \sum \frac{k^n}{n!} G_n(f),$$

e quindi, se k_1, k_2, \dots, k_s sono tutte e sole le radici di $\delta(k)$ inferiori in modulo ad r_1 , si può applicare all'insieme C e all'operazione A le considerazioni del n. 8.

12. Non tutte le operazioni distributive rientrano nella teoria precedente, il cui carattere è *l'esistenza di invarianti solo per valori discreti di k* . Per convincerci di ciò, consideriamo il caso straordinariamente semplice in cui, come operazione A , si assuma senz'altro l'ordinaria derivazione D : operazione cui manca però la proprietà della continuità. Nel campo C considerato nei numeri precedenti, la equazione

$$\varphi - kD\varphi = f$$

ammette infinite soluzioni per ogni valore di k ; in altri termini, ad ogni valore di k corrisponde per D un invariante, che è

$$ce^{\frac{x}{k}},$$

c essendo una costante arbitraria. La serie

$$(12) \quad \sum k^n D^n f$$

non converge e non dà la soluzione delle (a') che in un campo C' assai limitato: quello delle funzioni intere

$$\sum \frac{c_n x^n}{n!}$$

in cui è $|c_n| < \frac{m}{r^n}$, $r > |k|$. Ma a questa serie (12) non è applicabile la teoria esposta nella presente Nota, a meno che non si riduca ancora il campo funzionale, limitandolo a somme di esponenziali di forma particolare.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce*. Nota VIII del Socio G. CIAMICIAN e di P. SILBER.

Le esperienze che descriveremo brevemente nella presente comunicazione, fanno seguito a quelle di cui trattano le Note III e VI ⁽¹⁾ di questa serie di lavori. Noi ci eravamo proposti con queste nuove ricerche di allargare ed approfondire possibilmente lo studio dell'azione degli alcoli della serie grassa sul nitrobenzolo e di studiare ulteriormente il contegno del nitrobenzolo con le aldeidi aromatiche. Questa Nota si divide però in due parti in relazione ai due problemi ora indicati.

Nitrobenzolo ed alcoli della serie grassa.

È noto che per azione della luce il nitrobenzolo viene ridotto dall'alcool ad anilina e che per un ulteriore processo di condensazione, oltre a questa base si forma anche la chinaldina.

Questi però non sono i soli prodotti della reazione e nella nostra III Nota suindicata abbiamo accennato che altri ancora se ne rinvennero, ma soltanto in piccola quantità. Da qui la opportunità di ripetere su più larga scala la ricerca, la quale oltre che approfondita doveva pure essere allargata: allargata però soltanto nel senso di studiare il contegno di altri alcoli, perchè pochi composti nitrici si mostrarono adatti ad essere ridotti dall'alcool e, come avevamo trovato già allora, oltre al nitrobenzolo soltanto i nitrotoluoli.

Gli alcoli da noi ora sperimentati furono il metilico, l'etilico, il propilico e l'isoamilico ordinario. Di questi il primo, il metilico, non ha quasi nessun effetto, gli altri invece dettero i seguenti rendimenti, che non sono tra di loro essenzialmente diversi. Riferendole a 100 gr. di nitrobenzolo, si ebbero approssimativamente le seguenti quantità di basi, dosate allo stato di cloridrato:

coll'alcool metilico	: 0,2 gr,
coll'alcool etilico	: 6,8 "
coll'alcool propilico	: 8,5 "
coll'alcool isoamilico	: 6,6 " .

Oltre a questa parte basica, su cui ritorneremo subito, abbiamo trovato questa volta che v'è pure una parte del prodotto solubile sugli alcali caustici; essa era formata in predominio da materie amorfe e resinose, ma

(1) Questi Rendic., vol. XI, pag. 277 (1° sem. 1902), e vol. XIV, pag. 265 (1° sem. 1905).

conteneva sempre, in tutti i casi, il *p*-amidofenolo. Ciò sta a provare che la riduzione del nitrobenzolo per mezzo degli alcoli procede per gradi e che uno di questi è la fenilidrossilammina, la quale, come è ben noto, si trasforma assai facilmente in *p*-amidofenolo. Si avrebbe dunque la serie:



nella quale mancherebbe il primo termine, il nitrosobenzolo. La riduzione del nitrobenzolo coll'aldeide benzolica dà in parte analoghi risultati, perchè, come recentemente abbiamo dimostrato ⁽¹⁾, si ottengono i derivati benzoilici della fenilidrossilammina e dell'anilina; ma con le aldeidi aromatiche si formano pure l'azossibenzolo e l'o-ossiazobenzolo, i prodotti metamorfici del nitrosobenzolo, che qui mancano affatto. Si può dire però, che per azione della luce, gli alcoli della serie grassa esercitano sul nitrobenzolo una riduzione più energica delle aldeidi aromatiche.

La parte basica del prodotto era coi tre diversi alcoli (che del metilico non si può tener conto) in parte diversa. In tutti e tre i casi predominava l'anilina; accanto a questa abbiamo rinvenuto poi rispettivamente le tre basi chinoliniche, cioè: la *chinaldina*, l' $\alpha\beta$ -etilmetilchinolina e l' $\alpha\beta$ -isobutylisopropilchinolina, che sono i tre alcaloidi ottenuti a suo tempo da Doebner e von Miller dall'anilina per condensazione con le aldeidi acetica, propionica ed isovalerianica mediante l'acido cloridrico. È assai verosimile il supporre che anche la reazione determinata dalla luce sia della stessa natura; le aldeidi, originatesi in una prima fase del processo, saranno state impiegate in parte nella condensazione chinolinica e forse in parte resinificate. Oltre alle basi ora accennate abbiamo ottenuto in tutti e tre i casi, ma però, pur troppo, sempre in assai esigua quantità, un composto basico della formola $\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_2\text{N}$, di cui non ci fu possibile determinare la struttura; inoltre, impiegando l'alcool propilico abbiamo accertato che la $\alpha\beta$ -etilmetilchinolina, $\text{C}_{12}\text{H}_{13}\text{N}$, era accompagnata da una base contenente una molecola d'acqua in più, della formola $\text{C}_{12}\text{H}_{15}\text{ON}$.

Nitrobenzolo ed alcool metilico. — Come s'è detto, il rendimento in questo caso è quasi trascurabile anche con una insolazione prolungata. Impiegando 200 cc. di nitrobenzolo ed un litro d'alcool metilico, non si ebbero che 0,4 gr. di cloridrati; questo residuo conteneva cloruro ammonico e dava la reazione dell'anilina.

Nitrobenzolo ed alcool etilico. — Vennero esposti in tutto 960 cc. di nitrobenzolo sciolti in 2,4 litri d'alcool al 98 %, dall'aprile-maggio alla fine d'ottobre (1904). Dopo eliminato l'alcool e dal liquido, acidificato con acido cloridrico, con vapore acqueo, il nitrobenzolo, abbiamo estratto con etere la soluzione acida. L'estratto eterico bruno e vischioso, d'odore indo-

(1) Vedi la citata Nota VII, pag. 265 e seg.

lico, era insufficiente per un'ulteriore ricerca (2 gr.). La detta soluzione acquosa, liberata da quanto poteva cedere all'etere, venne resa alcalina con potassa e distillata nuovamente con vapore. Passarono così le basi di cui diremo più avanti.

Il liquido rimasto indietro, era colorato in bruno e conteneva in sospensione alquanto resina, da cui si filtrò; saturandolo con anidride carbonica si ebbe un notevole precipitato amorfo, solubile nell'etere. Il prodotto nero e catramoso, così ottenuto, lasciato in contatto con poco etere, cristallizza in parte ed i cristalli, meno solubili in questo solvente, possono così essere facilmente separati dalla resina. Essi furono tosto riconosciuti per il *p-amidofenolo*; per accertarne con sicurezza l'identità, l'abbiamo trasformato, seguendo l'esempio di R. Meyer ed J. Schäfer ⁽¹⁾, nel *composto dibenzoilico*, per trattamento con cloruro di benzoile in soluzione alcalina. Il detto composto cristallizza dall'alcool in sottilissimi aghi bianchi, che riempiono tutto il liquido. Essi fondevano a 235°, Börnstein ⁽²⁾ dà il punto di fusione 234°, ed avevano la composizione corrispondente alla formola:



La parte amorfa e resinosa, che accompagnava il *p-amidofenolo*, dette un picrato pure amorfo di colore giallastro, ma non ci fu possibile ottenere da questo un prodotto bene definito.

Dopo ciò ci siamo rivolti allo studio delle basi, per andare in traccia di quei corpi che potevano accompagnare in piccola quantità l'anilina e la chinaldina. Tutta la parte basica, passata col vapore acqueo, pesava allo stato di cloridrato 61 gr. Essa venne trattata con cloruro platinico, per ottenere una prima separazione del cloroplatinato poco solubile da quelli più solubili. Il precipitato abbondante, così ottenuto, risultò formato esclusivamente dal cloroplatinato di chinaldina. Per la sua limitata solubilità, l'abbiamo trasformato in picrato, onde poter sottoporre questo ad un esauriente processo di cristallizzazione frazionata dall'alcool, e così accertare l'eventuale presenza di qualche altro alcaloide; tutte le frazioni si mostrarono però identiche, dal punto di fusione 194°, che corrisponde sufficientemente a quello 191°, dato dagli autori ⁽³⁾ pel *picrato di chinaldina*.

Le basi che non precipitarono col cloruro platinico e che erano formate quasi esclusivamente dall'*anilina*, vennero poste in libertà e, seguendo il metodo di separazione praticato l'altra volta ⁽⁴⁾, trasformate in derivati acetilici per ebollizione con anidride acetica. Il prodotto venne quindi sotto-

(1) Berichte, vol. 27, pag. 3358. Vedi anche Ladenburg, ibid., 9, 1529.

(2) Ibid., vol. 29, pag. 1484.

(3) Vedi Beilstein, vol. IV, pag. 308.

(4) Vedi la III Nota, pag. 278.

posto ad un sistematico processo di cristallizzazione frazionata dall'acqua bollente, separando sempre le prime parti, che si depositavano per raffreddamento, dal resto dell'*acetanilide*, che rimaneva in gran copia nelle acque madri. Riuscimmo così, anche questa volta, ad ottenere una sostanza cristallizzata in bellissimi aghi lunghi, poco solubili nell'acqua, che fondevano a 178-179°. Il prodotto avuto allora fondeva a 175°. Questo composto è il *derivato acetilico* della base $C_6H_7O_2N$, già menzionata più avanti ed ha la formola:



Da questo abbiamo ottenuto, per svaporamento con acido cloridrico, il cloridrato della base e poi, per trattamento con potassa, la base libera stessa, che cristallizza dall'etere petrolico in grosse lamelle prive di colore, dal punto di fusione 70-71°. L'analisi ne confermò la formola:



Essa è poco solubile nell'acqua, a cui non comunica reazione alcalina e, massime a caldo, manifesta un odore simile a quello dell'anilina, ma alquanto più pungente. Riduce appena il liquore di Fehling. La sua soluzione cloridrica riduce invece subito il cloruro d'oro; col cloruro platinico, si ottiene un precipitato pure abbondante, che annerisce col riscaldamento. Coll'acido picrico, dà un picrato, che cristallizza in aghi gialli, fusibili a 185°.

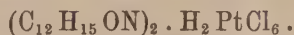
Ne abbiamo preparato anche il *derivato benzoilico*, per trattamento della base con cloruro di benzoile in presenza di potassa. Cristallizzato dall'alcool metilico, si presenta in tavole rombiche, insolubili nell'etere, che fondono a 192°, della formola:



Tutti questi prodotti cristallizzano con la massima facilità e sono in genere poco solubili negli ordinari solventi. Per queste loro, così favorevoli proprietà abbiamo potuto, malgrado la estrema esiguità di materia, accertare con sicurezza almeno la formola empirica di questo interessante alcaloide. Pur troppo la sua quantità non fu sufficiente per determinarne anche la struttura e possiamo dire soltanto, che esso sembra poter dare un composto diazoico, il quale per scomposizione darebbe un prodotto d'odore fenico e chinonico. Dalle ricerche che abbiamo fatto, sembra che questo composto non sia stato ancora descritto e speriamo che noi od altri lo possa incontrare in quantità più abbondante per poterne determinare la costituzione. La base proveniva certamente dal nitrobenzolo da noi impiegato (Kahlbaum), ma non è forse da escludersi che potesse derivare da qualche sostanza estranea che lo accompagnava; anzi noi, supponendo la presenza di qualche corpo tiofenico, abbiamo fatto la prova dello zolfo con sodio e nitroprussiato sodico, ma con esito negativo.

Nitrobenzolo ed alcool propilico. — La reazione che la luce determina fra questa coppia di sostanze, corrisponde perfettamente a quella ora descritta che ha luogo coll'alcool etilico; c'è in più soltanto questo, che la base chinolinica, la metiletilchinolina, è accompagnata da un'alcaloide che contiene una molecola d'acqua in più, dalla formola $C_{12}H_{15}ON$. Per accertare bene questo fatto abbiamo eseguito due diverse esperienze, che descriveremo distintamente.

Nella prima, abbiamo esposto al sole per circa 9 mesi 100 cc. di nitrobenzolo, sciolti in 500 cc. d'alcool propilico. Il trattamento fu il consueto e si ebbero 7,5 gr. di basi allo stato di cloridrato. Queste vennero separate mediante il cloruro di platino. Il precipitato cristallizzato frazionatamente dall'acido cloridrico diluito, potè essere scisso in due porzioni. Quella meno solubile aveva la composizione del *cloroplatinato di $\alpha\beta$ -etilmetilchinolina*. Lo si ebbe anidro come indicano Doebner e von Miller ⁽¹⁾ (in collaborazione con Kugler), cioè senza le due molecole d'acqua di cristallizzazione osservate da Niementowski ed Orzechowski ⁽²⁾. Fondeva con annerimento a 249°. La parte più solubile, dette dopo parecchie cristallizzazioni, un prodotto formato da aghi giallo-bruni, dal punto di fusione 219°. La sua composizione corrispondeva alla formola



Che la molecola d'acqua in più contenuta in questo sale rispetto al precedente, non fosse di un semplice idrato, lo dimostrò anzitutto il fatto che non può essere eliminata per riscaldamento e poi, come si vedrà, l'esame del picrato.

Le basi che non precipitarono col cloruro platinico dalla soluzione dei cloridrati greggi, furono trattate nel modo descritto precedentemente. Anche qui riscontrammo che erano formate prevalentemente dall'anilina, con tracce della base $C_6H_7O_2N$. Si ebbero di quest'ultima 0,2 gr. del derivato acetilico.

Nella seconda prova abbiamo variato il rapporto fra il nitrobenzolo e l'alcool propilico, impiegando 200 cc. del primo e 400 cc. del secondo; la durata dell'esposizione fu di circa un anno. Il miscuglio greggio dei cloridrati fu di 18 gr. In questa seconda esperienza abbiamo esaminato anche la parte del prodotto solubile nella potassa, che conteneva il p-amidofenolo. Per un accidente essa andò disgraziatamente perduta, ma possiamo affermare che essa era della stessa natura di quella descritta per l'alcool etilico.

I suddetti cloridrati vennero anche qui trattati con cloruro di platino, ma il precipitato ottenuto trasformato questa volta in picrati. Con una sistematica cristallizzazione dall'alcool ordinario e poi dal metilico, ottenemmo

⁽¹⁾ Berichte, vol. 17, pag. 1714.

⁽²⁾ Berichte, vol. 28, pag. 2815.

due distinti prodotti. Quello meno solubile in tutti e due i solventi si dimostrò identico al *picrato dell' $\alpha\beta$ -etilmetilchinolina*, $C_{12}H_{13}N \cdot C_6H_3O_7N_3$. Fondeva a 195°. Siccome nella letteratura non c'è quest'ultima indicazione, abbiamo fatto ripetere da un laureando la condensazione di Doebner e von Miler (¹), anilina ed aldeide propionica con acido cloridrico, ed abbiamo potuto convincerci dell'identità della nostra base colla detta $\alpha\beta$ -etilmetilchinolina. Il picrato più solubile cristallizzava dall'alcool metilico in tavole rombiche e fondeva a 182-183°. Questo sale aveva la composizione



e corrispondeva, come si vede, al cloroplatinato sopramenzionato. Da questo sale abbiamo liberato la base: un olio d'odore chinolinico alquanto pungente. La sua quantità non era però sufficiente per uno studio esauriente; salificata con acido cloridrico dette con cloruro platinico il cloroplatinato fusibile a 219°, già descritto. Con acido nitroso, il cloridrato non dà una nitrosamina e però è probabile che la base sia terziaria. Sulla sua costituzione, naturalmente, nulla possiamo dire, non è improbabile però che questo alcaloide, che crediamo non sia stato finora descritto, rappresenti un termine intermedio nella condensazione che conduce alla metiletilchinolina.

Per ultimo diremo che anche in questa seconda prova, nella soluzione dei cloridrati greggi, da cui vennero separate col cloruro di platino le basi ora descritte, erano contenute l'anilina e la base $C_6H_7O_2N$. Quest'ultima sempre soltanto in tracce, 0,3 gr. del suo derivato acetilico dal punto di fusione 178-179°.

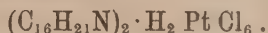
Nitrobenzolo ed alcool isoamilico. — Il contegno di queste due sostanze alla luce corrisponde così perfettamente a quello delle altre fin qui descritte, che potremo essere brevissimi. Al sole vennero esposti 300 cc. di nitrobenzolo, sciolti in 600 cc. di alcool amilico ordinario, per un anno intero. Abbiamo, come nel caso dell'alcool etilico, separate prima le basi, i di cui cloridrati greggi pesavano 19,8 gr., e poi esaminata la parte del prodotto solubile nella potassa. Questa era formata precipuamente da materie amorfe e conteneva il *p-amidofenolo*, che fu riconosciuto allo stato di composto debenzoilico, dal punto di fusione 234°.

La parte basica subì del pari il solito trattamento: precipitazione con cloruro platinico e successiva trasformazione dei cloroplatinati insolubili, in picrati. Questi vennero cristallizzati frazionatamente dall'alcool e si ebbe così una parte prevalente, dal punto di fusione 182-183° ed una assai esigua, che fondeva fra 165 e 169°. Quest'ultima non era sufficiente per un ulteriore esame. La prima, 182-183°, formata da larghe squame gialle, aveva la composizione del *picrato della $\alpha\beta$ -isobutilisopropilchinolina*



(¹) Ibid. 17, 1714.

Dal picrato si passò, attraverso alla base libera, al *cloroplatinato*; questo si presentò in tavolette ranciate dal punto di fusione 219° e della corrispondente formula



Disgraziatamente nella letteratura non si trovano i punti di fusione di questi due sali, ma non c'è ragione di dubitare che la nostra base sia identica con quella che Doebner e von Miller ottennero dall'anilina e dall'aldeide isovalerianica.

Anche coll'alcool amilico, la soluzione, da cui venne separata la base chinolinica ora menzionata, conteneva rilevanti quantità di anilina e piccole della base $\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_2\text{N}$. Dal suo derivato acetilico ne ottenemmo questa volta 1 gr.

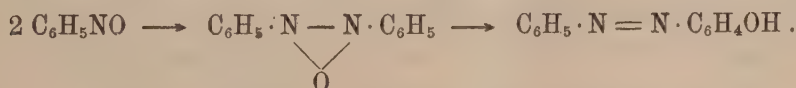
Nitrobenzolo ed aldeidi aromatiche.

Nella nostra ultima, VII, Nota, abbiamo fatto vedere come per azione della luce, il nitrobenzolo venga ridotto dall'aldeide benzoica in modo corrispondente alla serie completa:

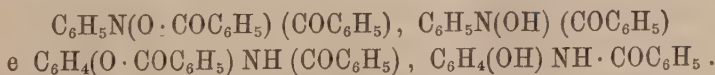


mentre l'aldeide si ossida ad acido benzoico. Ma, come facilmente si comprende; questi non sono i prodotti che realmente si ottengono; si formano invece sostanze che stanno con quelli in immediata relazione.

Il nitrosobenzolo, come risulta dalle nostre osservazioni sull'acido nitrosobenzoico ⁽¹⁾ e segnatamente da quelle di Bamberger ⁽²⁾, dà origine facilmente all'azossibenzolo, il quale, come trovò recentemente H. M. Knipscheer ⁽³⁾, passa per azione della luce al suo isomero l'o-ossiazobenzolo,



La fenilidrossilammina è rappresentata in prima linea dal suo derivato dibenzoilico ed in minore quantità da quello monobenzoilico, ma poi anche dal dibenzoil-p-amidofenolo e dal benzoil-o-amidofenolo,



Finalmente l'anilina dalla benzanilide, $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH} \cdot \text{COC}_6\text{H}_5$.

⁽¹⁾ Vedi la Nota III. Questi Rendiconti, vol. XI, pag. 281 (1° sem. 1902).

⁽²⁾ Berichte, vol. 35, pag. 1606 ed anche ibid., 33, 1939.

⁽³⁾ Centralblatt 1903, I, pag. 1082.

Il nostro ulteriore compito era però quello di vedere in che limiti questa reazione poteva essere allargata; se cioè le altre aldeidi aromatiche erano in grado di produrre analoghi effetti. Il risultato delle nostre esperienze fu questo: che all'infuori dell'aldeide anisica, le altre aldeidi da noi sperimentate non dettero risultati soddisfacenti; la reazione avviene in modo così limitato, che la ricerca dei prodotti formati non è più conveniente. Noi abbiamo, oltre l'*anisica*, di cui diremo più particolarmente più avanti, impiegato le *aldeidi vanillica, piperonilica, salicilica e cinnamica*, ma oltre i *rispettivi acidi*, non abbiamo ottenuto in quantità sufficiente, nè in modo conveniente altre sostanze. Queste ultime erano rappresentate da resine. Il *furfurolo* ci dette il peggiore risultato, perchè non ottenemmo che tracce di materie acide. Diremo ancora che, come era da prevedersi, i chetoni sono senza effetto sul nitrobenzolo; tanto l'*acetone*, che l'*acetofenone* lo lasciano completamente inalterato.

Aldeide anisica. — Fra tutte le aldeidi aromatiche da noi sperimentate, quella che più si accosta alla benzoica pel suo contegno col nitrobenzolo alla luce, è l'aldeide anisica e tanto che i prodotti ottenuti nelle due reazioni si corrispondono perfettamente. Anzi, avendo noi questa volta impiegato quantità minori di materia prima, non abbiamo potuto separare che i prodotti principali della reazione, i quali però vennero così a designarsi in modo più evidente. Essi furono oltre all'*acido anisico*, la *dianisoilfenilidrossilammia*, $C_6H_5N(O \cdot COC_6H_4 \cdot OCH_3) (COC_6H_4 \cdot OCH_3)$, l'*anisoilanilide*, $C_6H_5NH \cdot (COC_6H_4 \cdot OCH_3)$ e poi i due composti azoici provenienti dal nitrosobenzolo, cioè l'*azossibenzolo* e l'*o-ossiazobenzolo*.

Noi abbiamo esposto al sole in due differenti esperienze complessivamente 600 gr. del miscuglio, formato da parti uguali di nitrobenzolo ed aldeide anisica. La via da noi seguita nella ricerca, corrisponde assai da vicino a quella descritta ultimamente per l'aldeide benzoica e però potremo essere assai più brevi. I tubi dopo l'insolazione contenevano un liquido rosso-bruno scuro, in cui erano sospesi in notevole quantità i cristalli dell'acido anisico. L'intero prodotto venne distillato in corrente di vapore acqueo per eliminare la parte inalterata delle due sostanze prime. Il residuo col raffreddamento si rapprende in massa, per la cristallizzazione dell'acido anisico e perchè anche la parte oleosa, rimasta indisciolta in fondo al pallone, si solidifica. Il tutto venne agitato con etere e la soluzione eterea lavata ripetutamente con carbonato sodico per togliere l'*acido anisico*, che fu riottenuto poi dalla soluzione alcalina per acidificazione. La parte rimasta disciolta nell'etere, si presentò, dopo eliminato il solvente, quale massa precipuamente amorfa quasi nera, contenente alquanti cristalli giallastri. Venne seccata nel vuoto sull'acido solforico.

Nelle due esperienze eseguite con esposizioni di diversa durata, si ebbero i seguenti risultati, riferiti a 100 gr. di ciascuno dei due componenti.

Durata dell'esposizione	acido anisico	le altre sostanze
4 1/2 mesi	9 gr.	10 gr.
18 mesi	17,2 "	15 "

Comparando questo specchietto con quello pubblicato nella nostra ultima Nota, che riguarda la benzaldeide, si vede che i rendimenti sono presso a poco della stessa entità. Così ad es. per la massima esposizione d'allora (23 mesi) si ebbe, riferendo i rendimenti a 200 gr. di miscuglio di nitrobenzolo e benzaldeide, 16,4 gr. d'acido benzoico e 15 gr. delle altre sostanze.

L'ulteriore separazione dei prodotti venne fatta anche questa volta per mezzo dell'etere petrolico. La parte meno solubile, che resta indietro nell'esaurimento della massa greggia con questo solvente, venne trattata con etere. Questo ne scioglie una porzione, di cui diremo più avanti, e lascia indietro un residuo brunastro, che potè essere purificato dal benzolo. Così facendo, ottenemmo pagliette argentine, dal punto di fusione 171°, che si dimostrarono identiche all'*anisoilanilide*, $C_6H_5NH(COC_6H_4 \cdot OCH_3)$. Il nostro prodotto corrispondeva in tutto alla descrizione che ne danno gli autori (1); il punto di fusione indicato dal Lossen è di 169°,5.

Separata l'*anisoilanilide* dalle sostanze più solubili nell'etere, si passò all'esame di queste ultime, ma la particolareggiata descrizione del processo seguito, che sarà a suo tempo riportato per esteso nella Gazzetta chimica, ci condurrebbe oltre ai limiti segnati a questa Nota. Siccome però il lungo e paziente lavoro di separazione non può essere riassunto brevemente, così qui diremo soltanto, che, oltre all'*anisoilanilide* e ad una sostanza fusibile a 184°, riscontrata in assai piccola quantità, questa frazione conteneva ancora un composto della formola empirica $C_{22}H_{19}O_5N$, che sarebbe quella della *dianisoilfenilidrossilammina*:



Questa sostanza, che cristallizza dall'alcool metilico in prismi privi di colore, fusibili a 150°, non crediamo sia stata descritta fin'ora, ma per la sua composizione e per l'analogia colla *dibenzoilfenilidrossilammina*, che similmente si ottiene colla benzaldeide, apparisce assai probabile che essa abbia realmente la costituzione che noi le attribuiamo.

La parte del prodotto greggio, che a caldo si scioglieva nell'etere petrolico, venne scissa in due ulteriori porzioni. Quella che si separava tosto

(1) Vedi Beilstein, II vol., pag. 1530; Lossen, *Annalen der Chemie*, vol. 175, pag. 292; Haller, *Compt. Rend.* vol. 121, pag. 189.

per raffreddamento, andò per un piccolo incendio in parte perduta, ma da quanto potemmo salvare, risultò che essa conteneva, assieme a molta materia resinosa, ancora la anisoilanilide ed un composto fusibile a 208°. Quest'ultimo in quantità insufficiente per un ulteriore esame.

Le sostanze, infine, che rimasero, come più solubili nell'etere petrolico, nell'ultima parte del prodotto greggio, erano formate anche qui dai due composti azoici. La loro separazione venne eseguita mediante trattamento coll'acetato di rame in soluzione alcoolica, seguendo l'esempio del Bamberger e potemmo così accertare la presenza, in quasi uguali quantità, del l'*o*-ossi-azobenzolo, dal punto di fusione 81-82°, e dell'azossibenzolo, dal punto di fusione 35-36°.

Il comportamento del nitrobenzolo con le aldeidi aromatiche alla luce rimane così sufficientemente illustrato e crediamo che non avremo più bisogno di ritornare su questo argomento.

Infine non vogliamo tralasciare di ricordare anche questa volta il dott. Egisto Pavirani, che con molta diligenza prese parte a questi studi.

Botanica. — *Sulla Flora ipogea del Portogallo.* Nota del Socio O. MATTIROLO.

Lo studio dei funghi sotterranei finora raccolti in Portogallo e conservati nei Musei locali, studio che ho potuto condurre a termine grazie alla cortesia del sig. Adolfo Federico Moller del R. Istituto botanico dell'antica Università di Coimbra, sarà il primo lavoro indirizzato alla conoscenza della *Flora ipogea* di una delle regioni europee, che, botanicamente, hanno maggiore interesse. Ora, siccome i risultati di queste ricerche (che verranno fra breve fatti di pubblica ragione, nel Bollettino della Società Brotheriana), mi paiono rivestire un interesse non solo sistematico, ma una certa importanza per i fitogeografi, così ho pensato di riassumerli in questa Nota premettendo la indicazione delle specie studiate, tutte ritenute eduli nel Portogallo.

Fra le Tuberacee risultarono le seguenti specie:

1. *Tuber lacunosus* Mattirolò (*Terfezia Gennadii* Chat).
2. *Terfezia Leonis* Tul.
3. *Terfezia Hafzii* Chat.
4. *Terfezia Fanfani* Mattirolò.
5. *Delastreoides oligosperma* Mattirolò (*Terfezia oligosperma* Tul).
6. *Choiromyces Magnusii* Mattirolò (*Terfezia Magnusii* Mattirolò).

Fra le Hymenogastree:

7. *Rhizopogon rubescens* Tul.
8. *Rhizopogon luteolus* Tul.
9. *Rhizopogon provincialis* Tut.

Fra i Discomiceti ipogei:

10. *Hydnocystis Beccari* Mattirol.

Dal complesso di queste determinazioni e dalle osservazioni fatte, ho potuto trarre le seguenti considerazioni intorno ai caratteri e alla distribuzione areale dei principali funghi ipogei del Portogallo.

Le specie raccolte in Lusitania dimostrano infatti:

I. Che la *Flora sotterranea* del Portogallo si svolge con tutti i caratteri propri alla vegetazione ipogea che distingue la zona *atlantico-mediterranea*.

II. Che rapporti intimi esistono fra la *Flora ipogea* delle regioni delle Steppe dell'atlante algerino e sahariano, del Marocco, dell'Algeria e della Tunisia, e quella delle varie regioni del Mediterraneo, caratterizzate dalla presenza delle specie a foglie persistenti.

III. Che, sempre in questo ordine di fatti, una equipollenza di forme si osserva fra gli ipogei del Portogallo e quelli della Sardegna e della Sicilia; e ciò in rapporto alle affinità nei caratteri della vegetazione delle piante superiori proprie ai due paesi (¹).

IV. Che si ripetono nel Portogallo tutte le forme già note nelle regioni che gli corrispondono per clima e per tipo di vegetazione.

V. Che le specie lusitaniche armonizzano con quelle delle regioni atlantico-mediterranee, sia per la loro forma irregolarmente sferoidale; sia per avere il peridio liscio; sia infine per i colori del peridio stesso in generale chiari, fra l'*albido*, il *violaceo*, il *castaneo* ed il *castaneo badio*; mentre nessuna specie osservata sinora, presenta il tipo di colorazione delle specie principali del settentrione, nelle quali si incontrano tipiche le colorazioni nere o brune ed il peridio generalmente asperato, fortemente odoroso.

VI. Che il tipo delle Terfeziacee si sostituisce nel Portogallo, come nella regione atlantico-mediterranea, al tipo delle vere Tuberacee (gen. *Tuber*) proprio delle regioni settentrionali.

VII. Che l'area di distribuzione delle varie specie è sempre strettamente legata alle condizioni climatiche e fisiche del suolo, le quali determinano la presenza delle varie piante sulle radici delle quali gli ipogei fissano le loro relazioni simbiotiche.

VIII. Che la maggior parte delle Tuberacee *deserticole*, già indicate, dalle Canarie all'Asia centrale, in una zona che va dal 45° al 30° circa di latitudine settentrionale, si incontrano anche nel Portogallo, il quale così ci presenta il paese europeo più ricco in Terfeziacee.

(¹) Fra le Tuberacee sinora raccolte in Portogallo, due sole, cioè: *Terfezia Hafizii* Chat e *Delastroides oligosperma* Mattirol, non furono indicate ancora per le isole italiane.

Delle 10 specie di funghi sotterranei finora raccolti in Portogallo, risultano:

N. 9, presenti in 15 località della provincia di *Beira*, e fra queste n. 6 nella sola *Beira Baixa*.

N. 5 presenti in località dell'*Alentejo*.

N. 2 in 4 località dell'*Estremadura*.

Mancano dati relativi agli ipogei tanto dell'*Algarvia*, come delle provincie nordiche. Finora nessun ipogeo è stato ancora raccolto nel territorio di *Traz os Montes* e di *Entre Douro et Minho*.

Notisi che questi dati statistici danno solo un'idea approssimativa della distribuzione areale delle specie ritenute eduli in Portogallo.

Matematica. — *Sulle focali di Minding*. Nota di A. DEL RE, presentata dal Socio F. SIACCI.

In aggiunta al teorema di Minding, il Darboux ⁽¹⁾ dapprima con l'aiuto del primo dei suoi ellissoidi centrali, e poi il prof. Segre ⁽²⁾ con l'uso di una rappresentazione sui punti dello spazio delle rotazioni finite attorno ad un punto fisso, dimostrarono che le due coniche conosciute sotto il nome di *focali di Minding* sono il luogo di un punto al quale si deve tenere legato un corpo soggetto ad un sistema astatico di forze ⁽³⁾, perchè il corpo stesso sia suscettibile di assumere infinite posizioni di equilibrio. Ora, tenendo presente il modo col quale nella mia recente Nota: *Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo* ecc. (Rend. Acc. Napoli, maggio-giugno, 1905) io ho cercate e costruite le quattro posizioni di equilibrio che un corpo siffatto è suscettibile di avere allorchè è legato ad un punto genericamente preso nello spazio, oltre ad arrivare allo stesso risultato in una maniera ovvia e quasi intuitiva, si arriva altresì a costruire le rotazioni che conducono il corpo da una posizione *generale* ad una di quelle infinite posizioni di equilibrio, ed a studiare il modo di distribuzione di queste posizioni fra loro.

(1) *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire etc.* (Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux, 2^e Série, t. II, 1^{er} Cahier). Cfr. pag. 22 e § IX.

(2) *Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti* ecc. (Memorie della Società Italiana delle Scienze, Serie III, t. VI, 1884). Cfr. § III, in fine, prima parte dell'ultimo enunciato.

(3) Io chiamo *astatico* un sistema di forze applicato ad un corpo rigido, quando alle forze del sistema si attribuisce la qualità di essere mobili intorno ai proprii punti di applicazione con conservazione della intensità di ciascuna forza e della reciproca orientazione di tutte.

1. Poichè la ricerca delle quattro posizioni di equilibrio del corpo allorchè questo è legato ad un punto fisso arbitrario O , dipende dalla ricerca del triangolo coniugato comune alla conica centrale ψ di Darboux ed al sistema antipolare Π , nel piano centrale σ del corpo, rispetto al cerchio φ che ha per centro il piede O' della perpendicolare abbassata da O su σ , e per raggio la distanza $d = OO'$ (cfr. § IV, n. 15, Nota cit.), è evidente che, intorno al punto O saranno possibili infinite posizioni di equilibrio se ψ e Π avranno infiniti triangoli auto-coniugati comuni; vale a dire, detto Γ il sistema polare rispetto a ψ , se il prodotto $\Pi\Gamma$ è un'omologia (necessariamente col centro E , e con l'asse e , in un punto ed una retta che sono polari sia rispetto a Π che rispetto a Γ). Ora, poichè nel prodotto $\Pi\Gamma \equiv \Theta$, i punti O', C (con C indicando il centro di Γ) sono corrispondenti, la retta $O'C$ passerà pel centro E di Θ ; e, d'altra parte, poichè il polo della $O'C$, sia rispetto a Π che rispetto a Γ è il punto all'infinito di e , ne segue per essere e perpendicolare ad $O'E \equiv O'C$ che CO' è un asse di Γ . Dunque, la proiezione normale O' del punto O sul piano centrale σ è un punto di un asse di Γ ; vale a dire è O un punto di uno dei due piani mediani del corpo, per adoperare una denominazione dovuta al prof. Turazza (1).

2. Per vedere quale è il luogo dei punti O che rispondono al problema, diciamo

$$(1) \quad \mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 = 0$$

l'equazione della conica centrale di Darboux riferita ai suoi assi; le equazioni di tutte le coniche col centro in un asse di Γ , i cui sistemi polari hanno per prodotto con Γ un'omologia, sono quelle dell'una e dell'altra delle due forme

$$(2) \quad \mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 - k(y - m)^2 = 0$$

$$(3) \quad \mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 - k(x - m)^2 = 0,$$

ove k è un parametro che varia da una conica all'altra, e corrispondentemente è $y - m = 0$, o $x - m = 0$ l'equazione dell'asse dell'omologia prodotto. Perchè la (2) rappresenti un cerchio, si deve avere:

$$(4) \quad \mu^2 = \lambda^2 - k, \text{ d'onde } k = \lambda^2 - \mu^2$$

ed, analogamente, perchè sia un cerchio la (3) si deve avere:

$$(5) \quad \mu^2 - k = \lambda^2, \text{ d'onde } k = \mu^2 - \lambda^2.$$

Nel primo caso, l'ordinata $CO' = \eta$ del centro del cerchio rappresentato dalla (2) ed il raggio $i\zeta$ ($i = \sqrt{-1}$) sono rispettivamente dati dalle formole

$$\eta = -\frac{k}{\mu^2} m, \quad -\zeta^2 = \eta^2 - \lambda^2 + \frac{k}{\mu^2} m^2 = \eta^2 - \lambda^2 - \eta m;$$

(1) *Elementi di statica*. Parte prima, pag. 59, cap. V. Padova, 1872. Le focali di Minding sono chiamate dal Turazza *coniche mediane*.

per cui, eliminando m , si ha fra η e ζ la relazione

$$(6) \quad \frac{\eta^2}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{\zeta^2}{\lambda^2} - 1 = 0.$$

Nel secondo caso, l'ordinata $CO' = \xi$ del centro del cerchio rappresentato dalla (3) ed il raggio $i\xi$ ($i = \sqrt{-1}$), sono, rispettivamente, dati dalle formole

$$\xi = -\frac{k}{\lambda^2} m, \quad -\zeta^2 = \xi^2 - \mu^2 + \frac{k}{\lambda^2} m^2 = \xi^2 - \mu^2 - \xi m;$$

per cui, eliminando m , si ha fra ξ e ζ la relazione

$$(7) \quad \frac{\xi^2}{\mu^2 - \lambda^2} + \frac{\zeta^2}{\mu^2} - 1 = 0.$$

Conducendo i due piani mediani α, β (supp. che α passi per λ , e quindi β per μ), rispetto alla retta $\alpha\beta$ debitamente orientata, come asse delle z , ed agli assi delle x e delle y , sono $(0, \eta, \zeta)$ le coordinate di O nel primo caso, e $(\xi, 0, \zeta)$ le coordinate di O nel secondo. Il punto O appartiene dunque alla conica (6) o alla conica (7); le quali sono, evidentemente, l'una ellisse, l'altra iperbole mutuamente focali e focali entrambe alla conica centrale: sono appunto le *focali di Minding*.

3. Per vedere ora come sono distribuite intorno ad un punto O dell'una, o dell'altra, delle due focali, le varie posizioni di equilibrio del corpo, e come si passa a queste da una posizione generica del corpo stesso, conservando le notazioni precedenti, si dicano E ed e rispettivamente il centro e l'asse dell'omologia $\Theta = \Pi\Gamma$ relativa alla posizione scelta del punto O ; indi, per mezzo della omografia Ω definita come nel n. 15 della mia citata Nota *Sulle quattro rotazioni* ecc. si cerchino gli elementi E', e' corrispondenti di E, e .

Ad ogni triangolo auto-coniugato comune EF_iG_i rispetto ai sistemi polari Π, Γ , epperò tale che il triedro $O(EF_iG_i)$ è trirettangolo, corrisponde in Ω un triangolo $E'F'_iG'_i$ auto-coniugato rispetto a Π , epperò tale che è pure trirettangolo il triedro $O(E'F'_iG'_i)$ e sono di esso uno spigolo e la faccia opposta la retta OE' ed il piano Oe' . Per mezzo di quattro rotazioni $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ individuate come al n. 1 della suddetta Nota (cfr. pure il n. 14), si porta il triedro $O(EF_iG_i)$ sul triedro $O(E'F'_iG'_i)$ e le quattro corrispondenti posizioni che assume il corpo cui si suppone attaccato il triedro mobile, sono posizioni di equilibrio. Diciamo S_1, \dots, S_4 queste posizioni, e rammentiamo che da una di esse si passa alle altre tre facendo seguire quella prima dalle rotazioni di 180° (E'), (F'_i), (G'_i) intorno ad OE' , OF'_i , OG'_i .

Se al triangolo EF_iG_i si dà un'altra posizione EF_kG_k , e si dice $E'F'_kG'_k$ la posizione corrispondente di $E'F'_iG'_i$, altre 4 rotazioni $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$ condur-

ranno il corpo in altre 4 posizioni di equilibrio $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_4$, e pure queste sono tali che da una di esse si deducono le altre tre facendo seguire quella prima dalle rotazioni di 180° intorno ad OE' , OF'_k , OG'_k .

Vogliamo ora vedere in qual modo si può passare dalle $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_4$ alle S_1, \dots, S_4 . Si dica $E'F'_iG'_i$ il triangolo che corrisponde in Σ_h al triangolo OE_iF_i ⁽¹⁾ cioè sia $O(E'F'_iG'_i)$ il triedro sul quale si dispone $O(EF_iG_i)$ dopo della rotazione Σ_h ; si potrà allora condurre il triedro $O(E'F'_iG'_i)$ sul triedro $O(E'F'_iG'_i)$ per mezzo di quattro rotazioni $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_4$; due delle quali $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ lasciano invariato OE' in posizione e verso, e le altre due sovrappongono OE' a se stesso cambiando un verso nell'opposto (cfr. n. 1 e n. 11 della cit. Nota). Le $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ hanno, così, per asse OE' , mentre le altre due sono rotazioni di 180° con gli assi nel piano Oe' . Coi prodotti di Σ_h per le \mathcal{K} , i quali prodotti sono pure rotazioni, si porta il triedro $O(EF_iG_i)$ sul triedro $O(E'F'_iG'_i)$, cioè si porta il corpo dalla posizione attuale nelle posizioni di equilibrio S_1, \dots, S_4 . Si può dunque scrivere

$$\Omega_1 \equiv \Sigma_h \mathcal{K}_1, \quad \Omega_2 \equiv \Sigma_h \mathcal{K}_2, \quad \Omega_3 \equiv \Sigma_h \mathcal{K}_3, \quad \Omega_4 \equiv \Sigma_h \mathcal{K}_4,$$

e concluderne che $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_4$ portano il corpo dalla posizione di equilibrio \mathfrak{S}_h alle posizioni S_1, \dots, S_4 .

Gli angoli delle $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ differiscono di 180° , sicchè detto θ quello di \mathcal{K}_1 , è $\theta + 180^\circ$ quello di \mathcal{K}_2 . Scegliendo convenientemente il triangolo EF_kG_k si può fare in modo che θ diventi piccolo come si vuole, o che l'asse di una delle rotazioni $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ diventi una retta arbitraria del piano Oe' . Ne concludiamo che le posizioni di equilibrio del corpo intorno al punto O si distribuiscono per quaterne in modo che, mentre da una posizione di una stessa quaterna si passa alle altre tre facendo rotare il corpo di 180° intorno agli spigoli di un triedro trirettangolo di cui OE' è uno spigolo fisso, da una posizione di una determinata quaterna si passa sempre ad un'altra di un'altra quaterna facendo rotare il corpo di un angolo arbitrario attorno ad OE' , o pure di un angolo di 180° intorno ad una retta del piano Oe' . In altri termini, *i soli spostamenti capaci di condurre il corpo da una posizione di equilibrio, intorno ad O , ad una posizione pure di equilibrio sono le rotazioni di qualunque angolo attorno ad OE' , e le rotazioni di 180° attorno alle rette del piano OE' ; epperò, una posizione qualunque di equilibrio del corpo, intorno ad O , è posizione d'equilibrio indifferente soltanto per le rotazioni intorno ad OE'* . Queste conclusioni ed il fatto che i ragionamenti precedenti sono indipendenti dall'essere O sull'una o sull'altra delle due focali, mostrano in qual senso la seconda parte dell'enunciato dato dal prof. Segre, relativamente a questa questione, dovrebbe essere rettificata.

(1) Con Σ_h è qui intesa, come nella Nota cit. cui ci siamo riferiti, tanto la rotazione nello spazio, quanto la sua immagine prospettica.

Zoologia. — *Ancora della degenerazione senile negli Infusori*. Nota di PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

Questa Nota, che fa seguito a quella pubblicata nel fascicolo precedente (1), si occupa dell'allevamento della *Stylonichia pustulata* e della *Vorticella nebulifera*.

Stylonichia pustulata. — L'allevamento di questa specie mi ha servito per la ricerca delle forme degenerativè che il Maupas ha descritto col nome di degenerazione senile. Secondo ciò che già dissi nella prima Nota già citata, forme degenerative si incontrano in culture nelle quali non siano state prese misure di precauzione onde evitare lo sviluppo eccessivo di batteri. Secondo il Maupas i punti essenziali della degenerazione nella *Stylonichia pustulata* sono i seguenti: diminuzione di volume fino a 110-135 micron come primo fenomeno; il nucleo tende a frammentarsi (non mai più di 4 pezzi); il micronucleo dapprima si divide in pezzi, poi questi spariscono completamente, ed in queste condizioni si possono ancora osservare molte divisioni cellulari. In un secondo periodo, fenomeni più gravi si compiono: l'infusorio perde la facoltà di accrescersi e di riprodursi, non mangia più; diminuzione di volume fino a 70-90 micron. Le membranelle frontali spariscono completamente e dell'arco vibratile buccale non restano che le ultime membranelle vicine alla bocca. Con tale perdita, sparisce anche il vortice prodotto dalle vibrazioni di tali parti, e che conduceva normalmente gli alimenti dentro alla bocca. Nell'ultimo stadio, anche i cirri ventrali spariscono. I frammenti nucleari si conservano fino all'ultimo. Questi fenomeni contraddicono in maniera stridente con quelli che l'A. stesso descrive per la *Stylonichia mytilus*. In questa specie il micronucleo risolto in pezzi si conserva fino all'ultimo, il macronucleo invece non esiste più in un individuo disegnato dall'A., il quale, secondo la descrizione, ha sofferto poco nella organizzazione generale.

Le forme degenerative da me osservate, e di cui ho disegnato due esempli, assomigliano perfettamente a quelle del Maupas, per ciò che si riferisce alla sparizione delle membranelle frontali e dei cirri. Il macronucleo diviso in pezzi lo ho spesso osservato. Quanto al micronucleo, le cose sono un po' incerte, ossia, qualche volta ne ho trovati uno o due anche in forme molto degenerate, altre volte non mi è riuscito vederne anche in individui che erano meno modificati. Una tale irregolarità di comportamento non è punto in contraddizione con ciò che dice il Maupas, giacchè non è punto verosimile che le due specie di *Stylonichia* da lui studiate differiscano nettamente in un carat-

(1) V. pag. 351.

tere così fondamentale com'è quello della sparizione del micronucleo; tanto più che è affatto inverosimile essa avvenga nella pustulata tanto per tempo, senza che la scissione venga impedita; già il Calkins si è mostrato scettico di fronte a simile affermazione, ed io mi unisco a lui completamente in ciò. Ugualmente non credo affatto che possa del tutto sparire il macronucleo nella *Stylonichia mytilus*, senza che l'organizzazione generale ne soffra, come sarebbe il caso per la figura succitata. Evidentemente qua vi è qualche errore di osservazione. D'altra parte non è sempre con grande sicurezza che si può

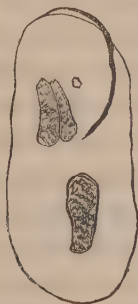


FIG. 1. — *Stylonichia* postulata che incomincia a degenerare; le ciglia ecc., normali, non sono rappresentate
× circa 500.



FIG. 2. — *Stylonichia* postulata in degenerazione avanzata × circa 500.

riconoscere quale è macro e quale è micronucleo, in individui nei quali il macro si divide in piccoli pezzi. Ma concludendo, ciò che vi è di sicuramente accettabile nelle descrizioni del Maupas, quanto alle modificazioni nucleari, cioè spezzettamento del macronucleo, e difficoltà di osservare il micronucleo, questi fatti li ho constatati io pure.

Le osservazioni qui accennate, sono state fatte sopra individui allevati per pochissimi giorni nei piccoli vetri di cultura, senza rinnovare la goccia di liquido, ma soltanto aggiungendo ad essa di quando in quando piccolissima quantità di infuso con batteri e flagellati; derivavano queste *Stylonichie* da un individuo, solo allora isolato, preso da un'acqua stagnante. La tecnica della fissazione e colorazione è stata la stessa di quella usata e descritta dal Maupas (sublimato; verde di metile). Di fronte a queste culture con fenomeni degenerativi, ne ho fatte altre con discendenti dallo stesso individuo, ma trattate diversamente, ossia come le culture di Glaucoma; ho contato fino alla centesima generazione per scissione, senza osservare fenomeni degenerativi.

Posso dunque ormai affermare con sicurezza che la degenerazione degli Infusori osservata dal Maupas e da altri, non è affatto una degenerazione senile, ma una degenerazione prodotta da agenti nocivi esterni, specialmente

dai batterî; nessun fatto dunque nega la possibilità che gli Infusorî si possano moltiplicare in eterno per scissione, senza coniugazioni; il problema però non si può risolvere con sicurezza in senso affermativo — ciò è evidente — perchè di fronte all'infinito le nostre osservazioni, per quanto lunghe, saranno sempre insufficienti.

Vorticella nebulifera. — Nell'allevamento delle Vorticelle, le difficoltà sono immensamente maggiori di quelle che si incontrano per gli altri Infusorî; anzi, non sono arrivato ancora a sormontarle completamente. Le Vorticelle, stando fisse, hanno bisogno di un ambiente molto più ricco di alimento, e quindi molto più facile ad alterarsi, giacchè l'alimento è sempre costituito da altri organismi che possono inquinare l'acqua, se si sviluppano in misura eccessiva. Quando una Vorticella è posta su un vetrino, ed unita ad un infuso, come per gli altri Infusorî, il primo giorno, spesso per qualche giorno di seguito, la divisione è lenta, scarsa; bisogna conservare sempre un individuo sullo stesso vetrino, ed allora si va formando un ambiente favorevole, perchè più ricco di piccoli protisti, che formano colonie aderenti al vetrino; in queste condizioni pare che le Vorticelle riescano a cibarsene con maggiore facilità, e ciò non può sembrare strano, quando si pensi che appunto attaccate al vetro esse vivono. Per evitare che lo sviluppo di batterî progredisca troppo, si può seguire questo metodo: si adoperano per le culture dei pezzetti di vetro senza nessuna cornice. Ogni giorno, dopo avere osservato al microscopio la posizione della Vorticella che si vuole conservare sul vetrino stesso, con un panno ben pulito si asciuga il vetro tutto attorno, in modo da limitare molto la zona non pulita; in questa si stacca la maggior parte dei protisti aderenti al vetro, mediante un ago che si struscia ripetutamente e rapidamente sul vetro, mentre si osserva al microscopio la Vorticella, per non correre il rischio di urtarla. Con un poco di pratica si riesce facilmente a trovare quale è quel grado di pulizia che meglio si confà alla vita delle Vorticelle. Come è noto, una Vorticella che sta attaccata in un punto, e che non vi trovi più condizioni di vita perfettamente favorevoli, si stacca e va a fermarsi in altro posto portando dietro il proprio peduncolo; orbene, io non sono riuscito ad impedire che qualche volta tale fenomeno si producesse nelle mie culture; questo dimostra che le condizioni di allevamento non erano sempre perfettamente buone; e ciò è della massima importanza per l'interpretazione dei fatti che verranno tra poco descritti.

Veramente anche le Vorticelle si potrebbero allevare con una certa facilità, se si trattasse di fare esattamente le stesse ricerche che si fanno sugli altri Infusorî; volendo cioè propagare indefinitamente la specie per divisione, senza curarsi quale sia l'individuo che si conserva, dopo la divisione. Ma le condizioni speciali della vita e della riproduzione delle Vorticelle mi hanno suggerito di fare qualche cosa di più, ed in questo ho trovato le cause delle maggiori difficoltà. Quando una Vorticella si divide, come è noto uno degli

individui figli rimane attaccato al posto di prima, collo stesso peduncolo contrattile, mentre l'altro che nasce senza peduncolo, va in giro fino a trovare un posto conveniente alla sua fissazione; dove si ferma, genera un peduncolo nuovo. Queste circostanze mi hanno suggerito l'idea di ricercare che avvenga, dopo molte generazioni, di un determinato peduncolo. Stando fissa la Vorticella in un posto, è assai facile di ritrovare uno stesso individuo su un preparato, senza timore di confonderlo con altri; basta avere un tavolino traslatore, e stabilire la posizione dell'individuo sopra al vetrino, mediante due numeri; ogni giorno si può così andare a ricercare lo stesso punto del preparato; generalmente non accade che altre Vorticelle si vadano a fissare proprio tanto vicine a quella in questione, da non poterle più tra loro riconoscere. La difficoltà di questo genere di ricerche deriva dal fatto che qualche volta la Vorticella presa di mira cambia posto; altre volte succede qualche accidente inesplicabile, per cui dopo pochissime generazioni muore o si ammala gravemente; altre volte infine si pongono molto vicine a lei altre Vorticelle figlie, e per discostarle e toglierle, per quanto si faccia attenzione e si operi con un ago fine, si corre rischio di urtarla e spostarla o danneggiarla. Ho tentato di eliminare alcuni inconvenienti facendo culture con Vorticelle non attaccate al vetro, ma a piccolissimi corpi sospesi nel liquido; Vorticelle in simili condizioni è facile procurarsele, ma si va incontro a parecchi inconvenienti anche peggiori dei primi, tra cui notevole specialmente questo: che l'alimentazione è facilmente troppo scarsa, a meno di non riempire troppo di piccoli protisti il liquido, ciò che è dannoso per un altro verso.

I risultati di queste culture, quando si riesce a sfuggire un po' a lungo a tutti i pericoli, sono un poco diversi secondo le circostanze. Devo dire che incominciai queste ricerche nella stagione fredda, ossia in condizioni nelle quali le Vorticelle si riproducevano pochissimo, e facilmente i preparati si guastavano; per evitare l'inconveniente della temperatura bassa, tenni le culture in un termostato sui 20° circa, ciò che corrispose assai bene; ma non si può escludere che il raffreddamento a cui andavano soggette le culture durante l'osservazione al microscopio, non potesse portare a conseguenze dannose. Fatto sta che in queste condizioni ottenni risultati che nella stagione calda si ripeterono soltanto eventualmente, dimostrando di essere anormali. Nella descrizione di questi fatti converrà chiamare Vorticella madre quella che rimane attaccata al peduncolo, e figlia quella che lo rigenera; ciò tanto per distinguerle senza troppe circonlocuzioni. Qui, come nelle coltivazioni degli altri Infusori, ho tenuto nota del numero delle successive generazioni, lasciando ogni giorno nella cultura una sola Vorticella, e precisamente la madre.

Quasi sempre si può osservare che una Vorticella produce due, tre, cinque figlie successivamente, senza che si modifichi affatto il suo peduncolo; poi, senza ragione apparente, si comincia a notare che la parte basale

del peduncolo si contrae più lentamente, più difficilmente, di quella che è più vicina al corpo cellulare; qualche volta questa differenziazione funzionale sparisce il giorno successivo, per lo più si intensifica, e si manifesta con un carattere morfologico spiccatissimo: il filamento muscolare interrotto in un punto; allora si contrae fino a quel punto normalmente il peduncolo; da quello al punto di attacco sul vetro, non si contrae affatto, e rimane rigido, disteso; questa condizione di cose porta come conseguenza inevitabile la spezzatura del filamento muscolare in moltissimi piccoli pezzi, nella parte che non si contrae più; la fig. 3 mostra la cosa abbastanza nettamente. Essa è tolta da una fotografia fatta dal vivo, una quasi istantanea, fatta colla speranza che nel momento dell'esposizione la Vorticella non si movesse; speranza che viene raramente delusa se, come in questo caso, la Vorticella sta molto più tempo ferma che in movimento.

La morte di una porzione del filamento contrattile è seguita da un accrescimento del peduncolo, che può diventare veramente lunghissimo, quando diverse porzioni successivamente muoiono, spezzettandosi. Mentre il peduncolo normale di questa specie può di poco superare i 400 micron, ne ho osservati di alterati, lunghi quasi 700 micron; la parte contrattile, normale, è sempre, anche in questi, più corta o per lo meno non più lunga di un peduncolo normale.

Ma tale morte di pezzi ed accrescimento ulteriore del peduncolo, non è una condizione normale. Avendo moltissime cure, e nella primavera che è la stagione più propizia, si possono seguire generazioni e generazioni, senza che il peduncolo si alteri minimamente; esso raggiunge in un giorno o in poche ore la sua lunghezza massima, e non si accresce più. Sono arrivato a conservare una Vorticella al suo posto col suo peduncolo intatto, per 56 generazioni, dal 4 al 30 di maggio. Molte altre volte ho superato la 30ª generazione. Ma siccome qui è il numero più grande quello che ha più interesse, dirò specialmente di quel caso. Un bel giorno, alla 56ª generazione, trovai nel vetrino 4 individui — compreso quello in questione — tutti più o meno alterati; lo sviluppo di batteri era grandissimo nella cultura; la Vorticella col vecchissimo peduncolo si staccò dal suo posto, per morire entro la giornata. Evidentemente un accidente fortuito fu la causa di questa perdita; nello stesso giorno nella cultura di Glaucoma trovai meno individui che nei giorni precedenti e seguenti (dopo aver cambiato l'infuso alimentare). Così allorquando una Vorticella muore dopo parecchie gene-



Fig. 3. — Vorticella nebula fera dopo circa 30 generazioni in situ \times circa 500.

razioni, quasi sempre si può riconoscere quale sia la causa che determina questo fatto, o per lo meno si osserva che esso non si verifica soltanto per la Vorticella in questione, ma anche per altre Vorticelle dello stesso vetrino, oppure nelle altre culture trattate allo stesso modo. Di fronte a questo numero elevato di generazioni, che, se si trattasse di uomini, porterebbe a più di un millennio e mezzo, mi pare che non si possa affatto affermare che il peduncolo delle Vorticelle sia destinato necessariamente a morire. Esso deve morire perchè le condizioni esterne, molteplici e spesso nemiche, impediscono che esso viva eterno; e ciò è evidente; ma che condizioni intrinseche ne determinino di necessità la morte, nessuna prova vi è; credere questo sarebbe avere un concetto antropomorfo non basato sui fatti. Io non voglio nemmeno affermare con sicurezza che il peduncolo di una Vorticella sia potenzialmente immortale. Affermo soltanto che nessun fatto autorizza a negarlo, e che ho la convinzione personale che, se si potessero evitare permanentemente le condizioni dannose che si vedono agire in queste culture (e spero che con ricerche future si riuscirà anche a questo), molte generazioni di uomini potrebbero succedersi a constatare l'esatta posizione, immutata, dell'intrepido peduncolo.

Come si vede, i fenomeni presentati dalle Vorticelle differiscono notevolmente da quelli di altri Infusorî, nei quali generalmente si rigenerano, in tutti e due i discendenti da uno, gli organi locomotori ed altro; questo almeno ha osservato in più specie il Wallengren ⁽¹⁾ con interessanti ricerche.

Queste ricerche danno dunque la prova diretta della mancanza di degenerazione senile negli Infusorî, in quanto che fenomeni degenerativi non si sono osservati durante quasi 700 generazioni per scissione; prova ben più completa che nelle ricerche del Calkins, ove speciali azioni stimolanti erano state necessarie per eliminare i fenomeni degenerativi incipienti, o delle brevi ricerche del Kulagin ⁽²⁾, che osservava fenomeni degenerativi nei Parameci, presto eliminati col portare gli individui alterati nell'acqua pura, o di quelle del Joukowsky ⁽³⁾, che non eliminarono abbastanza la possibilità della coniugazione, la quale infatti fu talora osservata. Ne danno anche una prova indiretta, colla esatta riproduzione della degenerazione detta senile dal Maupas, in Stilonichie giovani per le generazioni, ma assoggettate ad influenze batteriche. Infine a proposito delle Vorticelle, mostrano l'esistenza di un organo, il peduncolo contrattile, che probabilmente non è, per condizioni interne, destinato a morire.

⁽¹⁾ *Zur Kenntniss des Neubildungs- und Resorptionprocesses bei der Theilung der Hypotrichen Infusorien.* Z. Jahrbuch. Morph. Abt. 15 B. 1-58.

⁽²⁾ Kulagin, *Zur Biologie der Infusorien*, Physiologiste Russe, vol. 1, pagg. 269-275, 1900.

⁽³⁾ Joukowsky, *Beiträge zur Frage nach der Bedingungen der Vermehrung und des Eintrittes der Conjugation bei den Ciliaten.* Verh. Nat. Med. Ver. Heidelberg (2) 6 B. S. 17-42. 1898.

Bacteriologia. — *Sulla flora batterica del formaggio di Grana* ⁽¹⁾. Nota preventiva del prof. C. GORINI, presentata dal Socio G. BRIOSI.

Dopo che Cohn e Duclaux ebbero dimostrato l'intervento microbico nella maturazione dei formaggi, i batteriologi impresero a studiare a quali specie di germi dovesse attribuirsi la maturazione delle diverse qualità di formaggio.

Per quel che riguarda i caci a pasta cotta, le più laboriose ricerche in questo indirizzo furono eseguite sul cacio Emmenthal. In seguito a queste indagini furono avanzate diverse opinioni, che si possono raggruppare sotto tre teorie:

1. La teoria dell'Adametz, di Vienna, secondo il quale gli agenti maturatori sarebbero i bacilli cosiddetti *Tyrothrix* di Duclaux, che sono capaci di peptonizzare, ossia di solubilizzare la caseina, dopo averla coagulata mediante un fermento presamico.

2. La teoria del Freudenreich, di Berna, secondo il quale gli agenti maturatori sarebbero i cosiddetti batteri o *fermenti lattici*, che coagulano il latte per acidificazione senza peptonificarlo.

3. La teoria del Weigmann, di Kiel, secondo il quale gli agenti maturatori apparterrebbero a parecchie specie batteriche, fra cui anche batteri anaerobi e fermenti butirrici.

Io non starò qui ad esporre i *pro* e i *contra* delle diverse teorie; dirò solamente che, a mio parere, se la terza teoria pecca forse di eccessiva larghezza e indeterminatezza, le prime due peccano certamente di esclusivismo.

E infatti l'appunto principale che si muove alla teoria del Freudenreich è che i fermenti lattici da lui indicati non sono capaci da soli di attaccare la caseina, in guisa da dare tutti i prodotti solubili che caratterizzano la maturanza del cacio. E l'appunto principale che si muove alla teoria dell'Adametz è che le *Tyrothrix* da lui indicate sono atte a svilupparsi solamente in ambiente neutro od alcalino, ma non nell'ambiente acido che si incontra ordinariamente nei formaggi, in ispecie nei primi tempi della loro maturazione.

Mentre fervevano le dispute fra le varie opinioni, io feci conoscere l'esistenza di batteri, che denominai *acido-presamigeni* perchè coagulano il latte per produzione simultanea di acidità e di enzima presamico, i quali sono

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Bacteriologia della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano. Nota pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1905.

in grado di peptonificare la caseina anche in ambiente acido⁽¹⁾. Essi rappresenterebbero una specie di tratto d'unione fra i *fermenti lattici* propriamente detti e le *Tyrothrix* di Duclaux, che possiamo chiamare *fermenti caseinici*. I fermenti acido-presamigeni, riunendo in sè le proprietà, dirò così, antagoniste dei fermenti lattici e dei fermenti caseinici puri, si presentano adunque particolarmente idonei a vivere ed a funzionare nei formaggi in maturazione.

Fondandomi pertanto sopra queste considerazioni, io espressi fin d'allora l'ipotesi che anche questa classe di batteri potesse partecipare al processo di maturazione dei formaggi. In questa supposizione andai sempre più rafforzandomi, man mano che accertavo la presenza di batteri acido-presamigeni-peptonificanti sia nel latte di mercato⁽²⁾, sia nei dotti galattoferi delle vacche⁽³⁾, sia nei formaggi in maturazione⁽⁴⁾.

Oggi poi, in seguito agli studi di oltre un triennio sulla fabbricazione del formaggio di Grana, compiuti dapprima in diversi caseifici privati appartenenti a diverse regioni lombarde, indi nel Caseificio sperimentale di Trenno⁽⁵⁾, ho potuto acquistare e sono in grado di fornire la prova convincente della giustezza delle mie vedute.

Numerose ricerche bacteriologiche eseguite e sul latte prima di andare in caldaia, e sul latte e sulla cagliata durante la lavorazione in caldaia, e sul formaggio stesso nei diversi periodi di maturazione, mi autorizzano a dichiarare:

1. che in conformità a quanto già ebbi a dimostrare mediante l'esame microscopico diretto del formaggio Grana⁽⁶⁾, i batteri sono irregolarmente distribuiti nella massa del formaggio; per cui, se si sottopongono a cultura diversi punti di una medesima forma di cacio, si incontrano delle differenze talora anche notevoli nelle specie bacteriche rappresentate;

2. che però le specie più diffuse e più numerose appartengono ai due gruppi di batteri del latte che, secondo la classificazione da me proposta in

(1) Atti dei Laboratori scientifici della Direzione di sanità, Roma, 1892. — Rivista d'igiene e sanità pubblica, 1893, IV, p. 549. — Giornale della R. Società italiana d'Igiene, 1894, XVI, n. 4. — Bollettino ufficiale del Ministero di Agricoltura, 1897.

(2) Giornale della R. Società italiana d'Igiene, loc. cit.

(3) Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e lett., 1901, XXXIV, serie 2^a.

(4) Ibidem, 1904, XXXVII, serie 2^a.

(5) È questo un caseificio che ho potuto sistemare nei pressi di Milano, mercè l'appoggio morale e materiale di un'Associazione di agricoltori presieduta dal benemerito senatore Giulio Vigoni, della Direzione della Scuola Sup. d'Agricoltura di Milano e del Ministero d'Agricoltura. In questo caseificio si istituirono dal 1903 delle prove di fabbricazione del formaggio di Grana, allo scopo di studiare e dimostrare i vantaggi pratici che l'industria casearia può derivare dall'applicazione di norme razionali fondate sulla bacteriologia e sull'igiene. (V. i rendiconti relativi nel Bollettino Ufficiale del Ministero d'Agricoltura, 1904 e 1905).

(6) Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e lett., 1904, XXXVII, serie 2^a.

un lavoro antecedente (¹), si possono indicare come segue: a) fermenti del lattosio, che acidificano il latte senza peptonificarlo; b) fermenti del lattosio e della caseina, che acidificano e peptonificano il latte.

Laonde, senza voler cadere in quell'assolutismo che ho sopra lamentato, senza cioè mettere *a priori* in non cale le altre specie batteriche che in numero relativamente scarso e irregolarmente si incontrano nel formaggio di Grana, dalle mie ricerche traggio la conclusione che *la flora batterica normale del formaggio di Grana è costituita prevalentemente da due generi di fermenti*:

a) *fermenti lattici propriamente detti*;

b) *fermenti acido-presamigeni-peptonificanti*.

Fra il primo gruppo di batteri sonvi parecchie specie, di cui alcuni cocchi, alcuni cocco-bacilli e alcuni bacilli; nel secondo gruppo si contano soprattutto due tipi di cocchi.

Riservandomi di dare la descrizione delle singole specie, mi basta per ora di aver fatto conoscere che la flora batterica normale del formaggio di Grana, principe dei caci italiani a pasta cotta, viene a dar ragione tanto alle vedute del Freudenreich, quanto alle vedute mie.

PERSONALE ACCADEMICO

Pervenne all'Accademia il triste annuncio della morte del Socio straniero FERDINANDO VON RICHTOFEN, mancato ai vivi il 6 ottobre 1905; apparteneva il defunto all'Accademia, sino dal 20 settembre 1887.

V. C.

(¹) L. cit. sub (6).